

УДК 539.3

П. Я. Носатенко, М. Н. Омельченко

ТРЕХМЕРНЫЙ АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ СЛОИСТЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ ИЗ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

P. Ya. Nosatenko and M. N. Omelchenko

THREE-DIMENSIONAL ANALYSIS OF THE STABILITY OF LAMINATED ANISOTROPIC SHELLS OF REVOLUTION MADE OF COMPOSITE MATERIALS

It is proposed that equations of the three-dimensional problem of the elasticity theory are applied for investigating the stability of laminated anisotropic (nonorthotropic) shells of revolution. The problem of applying the partially linearized strain relations for calculating the stability of very thin shells is considered in detail. Ten variants of finite-element algorithms have been worked out and tested for solving the three-dimensional stability problems differing in continuum models and ways of constructing the discrete analogue of stability equations. The effect of anisotropy in the stability problem is investigated on the example of calculating a cross-ply double-curved shell subjected to external pressure. The calculations based on the model of a macroscopic homogeneous orthotropic shell are shown to be not applicable for such problems because of distorting the stress-strain characteristics both in the initial and buckling states, and, consequently, increasing loads critical to the stability loss.

Применяемые в технике композитные тонкостенные конструкции с механической точки зрения имеют особенности, затрудняющие их анализ на основе упрощенных подходов: анизотропия и неоднородность внутреннего строения порождают в них поля напряжений и деформаций с явно выраженным пространственным характером, учет которого необходим и в задачах упругой устойчивости [1]. К настоящему времени известно ограниченное количество работ, связанных с пространственным расчетом устойчивости слоистых анизотропных (неортоотропных) элементов конструкций [2...6]. В основном это трехмерные задачи устойчивости прямоугольных пластин [2, 3] и двухмерные задачи устойчивости: протяженных панелей в условиях обобщенной плоской деформации [4] и оболочек вращения при осесимметричном выпучивании [5, 6].

В данной работе представлены постановки трехмерных линеаризованных задач устойчивости и универсальные конечно-элементные алгоритмы их решения для различных классов осесимметрично нагруженных анизотропных оболочек вращения. На примере расчета оболочки двоякой кривизны исследован эффект анизотропии при неосесимметричной форме потери устойчивости.

Постановки трехмерных линеаризованных задач устойчивости. Отнесем оболочку вращения, слои которой обладают общими свойствами цилиндрической анизотропии, к цилиндрическим координатам r, θ, z . Механические модели различных типов слоев, фрагмент одного из которых показан на рис. 1, совпадают с принятыми в [7, 8]. Напряженно-деформированное состояние (НДС) характеризуется перемещениями $u = [u_r, u_\theta, u_z]^T$, тензорами деформаций E и напряжений σ , связанными соотношениями Дюамеля—Неймана [7]:

$$\sigma = BE - T\beta. \quad (1)$$

Введем несимметричный тензор-градиент перемещений H и транспонированный ему H^T с компонентами

$$H_{\alpha\beta} = u_{\alpha,\beta}; \quad \alpha = r, \theta, z; \quad \beta = r, z; \quad H_{r\theta} = (u_{r,\theta} - u_{\theta,r})/r; \\ H_{\theta\theta} = (u_{\theta,\theta} + u_{r,r})/r, \quad H_{z\theta} = u_{z,\theta}/r. \quad (2)$$

Тогда квадратично-нелинейный тензор деформаций есть

$$E = (H^T + H + H^T H)/2. \quad (3)$$

Задачу устойчивости сформулируем в бифуркационной постановке, при этом будем считать, что в естественном состоянии оболочка не нагружена ($u=0, E=0, \sigma=0$) и имеет температуру естественного состояния $T_e(r, z)$. В начальном состоянии оболочка нагружена объемными $\lambda_V \dot{p}_V(r, z)$ ($r, z \in V$) и поверхностными $\lambda_S \dot{p}_S(r, z)$ ($r, z \in S_p$) силами, нагрета по отношению к естественному состоянию на температуру $\lambda_T \dot{T}(r, z)$ и имеет на части поверхности $r, z \in S_u$ однородные и неоднородные кинематические граничные условия $\dot{u}|_{S_u} = \lambda_u \dot{u}_S(r, z)$, $S_p \cup S_u \leftrightarrow S$, λ_k ($k=S, V, T, u$) — параметры нагружения [7]. Нагружение и закрепление отвечают условиям осевой симметрии. Деформации начального состояния малы:

$$\dot{E} = (\dot{H}^T + \dot{H})/2. \quad (4)$$

При этом в (2) $\dot{u}_{\alpha}/\partial\theta = 0$ ($\alpha = r, \theta, z$), но $\dot{u}_0(r, z) \neq 0$ и $\dot{u}_{\theta,\alpha}(r, z) \neq 0$ ($\alpha = r, z$) в связи с учетом анизотропии. Условия равновесия в начальном состоянии следуют из вариационного принципа минимума полной энергии

$$\delta \left\{ \iint_{\Omega} \left[1/2 B E^2 - \lambda_T \dot{T} \dot{E} - \frac{C_e (\lambda_T \dot{T})^2}{2 T_e} \right] r dr dz - \right. \\ \left. - \lambda_V \iint_{\Omega} \dot{p}_V \dot{u} r dr dz - \lambda_S \int_{\Gamma_p} \dot{p}_S \dot{u} r d\gamma \right\} = 0; \quad (5)$$

$$\dot{u}|_{\Gamma_u} = \lambda_u \dot{u}_S; \quad \Gamma_p \leftrightarrow S_p \cap \Omega; \quad \Gamma_u \leftrightarrow S_u \cap \Omega,$$

где $r, z \in \Omega$ — двумерная область сечения оболочки плоскостью $\theta = \theta_*$.

Будем полагать, что задача (5) решена и величины \dot{u} , \dot{E} , $\dot{\sigma}$ определены. Под критическими нагрузками потери устойчивости будем понимать такой их уровень $\lambda_k = \lambda_k^*$, при котором без изменения внешних условий наряду с начальной формой равновесия (4), (5) возможно возникновение смежных, сколь угодно близких к ней $u = \dot{u} + \varepsilon \ddot{u}$. В рассматриваемом случае малых линейных начальных деформаций вариационное уравнение устойчивости (энергетический критерий устойчивости) [9] можно записать как

$$\delta \Delta \mathcal{E} = \delta \int_0^{2\pi} \left[\iint_{\Omega} (1/2 B E^2 - \sigma \dot{E}) r dr dz \right] d\theta = 0; \quad \ddot{u}|_{S_u} = 0, \quad (6)$$

где

$$\tilde{E} = (\tilde{H}^T + \tilde{H})/2; \quad \tilde{E} = \tilde{H}^T \tilde{H}/2 \quad (7)$$

линейные и нелинейные составляющие (3) для \ddot{u} . Учитывая периодичность задачи по θ , решение (6) следует искать в классе функций [10]:

$$\ddot{u}_r = v_r(r, z) \cos(\theta_0 + n\theta) + w_r(r, z) \sin(\theta_0 + n\theta); \quad r \neq z; \\ \ddot{u}_{\theta} = v_{\theta}(r, z) \sin(\theta_0 + n\theta) + w_{\theta}(r, z) \cos(\theta_0 + n\theta), \quad (8)$$

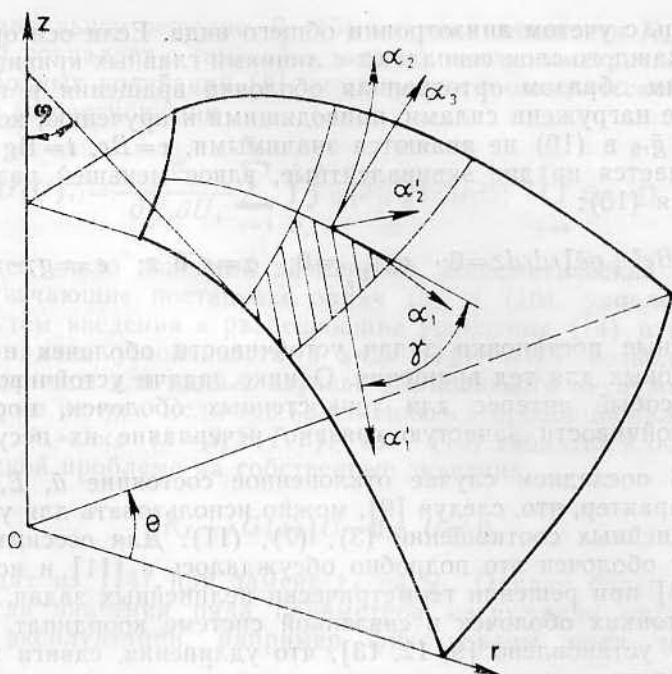


Рис. 1. Композитный слой оболочки вращения в цилиндрической и связанных системах координат.

Fig. 1. Composite layer of a shell of revolution in cylindrical and connected coordinate systems.

при этом потере устойчивости соответствует значение n из множества $n=0, 1, 2, \dots$, доставляющее минимум искомому параметру нагружения.

Компоненты \tilde{E} и $\tilde{\sigma}$ получим подстановкой (8) в (7) и (7) в (1) при $\tilde{T}=0$:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{rr} &= c_{rr}(r, z) \cos(\theta_0 + n\theta) + g_{rr}(r, z) \sin(\theta_0 + n\theta); \quad rr \rightleftharpoons \theta\theta \rightleftharpoons zz \rightleftharpoons rz; \\ \tilde{E}_{\theta z} &= e_{\theta z}(r, z) \sin(\theta_0 + n\theta) + g_{\theta z}(r, z) \cos(\theta_0 + n\theta); \quad \theta z \rightleftharpoons r\theta; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\tilde{E} \rightarrow \tilde{\sigma} \Rightarrow e \rightarrow \tau; \quad g \rightarrow t.$$

Подобным образом из (2), (7), (8) нетрудно установить и соотношения для компонент \tilde{E} , которые в силу громоздкости здесь не приводятся.

С учетом (8), (9) из (6) следует вариационная формулировка задачи устойчивости в двухмерной области $r, z \in \Omega$:

$$\delta \int_{\Omega} [1/2(\tau e + t g) + \tilde{\sigma}(\bar{e} + \bar{g})] r dr dz = 0; \quad v_{\alpha}|_{\Gamma_u} = 0; \quad w_{\alpha}|_{\Gamma_u} = 0; \quad \alpha = r, \theta, z. \quad (10)$$

Здесь компоненты тензоров \bar{e} и \bar{g} следующие:

$$\begin{aligned} 2\bar{e}_{\alpha\alpha} &= (v_{r,\alpha}^2 + v_{\theta,\alpha}^2 + v_{z,\alpha}^2); \quad \alpha = r, z; \quad \bar{e} \rightleftharpoons \bar{g} \Rightarrow v \rightleftharpoons w; \\ 2\bar{e}_{\theta\theta} &= [(nv_r + v_{\theta})^2 + (nv_{\theta} + v_r)^2 + (nv_z)^2]/r^2; \\ 2\bar{e}_{\theta z} &= [-w_{r,z}(nv_r + v_{\theta}) + w_{\theta,z}(nv_{\theta} + v_r) - nv_{z,z}v_z]/r; \\ 2\bar{e}_{rz} &= v_{r,r}v_{r,z} + v_{\theta,r}v_{\theta,z} + v_{z,r}v_{z,z}; \quad \bar{e} \rightleftharpoons \bar{g} \Rightarrow v \rightleftharpoons w; \\ 2\bar{e}_{r\theta} &= [-w_{r,r}(nv_r + v_{\theta}) + w_{\theta,r}(nv_{\theta} + v_r) - nv_{z,r}v_z]/r; \\ 2\bar{g}_{\theta\theta} &= [(nw_r - w_{\theta})^2 + (nw_{\theta} - w_r)^2 + (nw_z)^2]/r^2; \\ 2\bar{g}_{\theta z} &= [v_{r,z}(nw_r - w_{\theta}) + v_{\theta,z}(-nw_{\theta} + w_r) + nv_{z,z}w_z]/r; \\ 2\bar{g}_{r\theta} &= [v_{r,r}(nw_r - w_{\theta}) - v_{\theta,r}(nw_{\theta} - w_r) + nv_{z,r}w_z]. \end{aligned} \quad (11)$$

Отметим, что, как и в задачах расчета НДС [10] и свободных колебаний [8], наличие одновременно sin- и cos-составляющих в (8), (9)

связано лишь с учетом анизотропии общего вида. Если оси ортотропии материала каждого слоя совпадают с линиями главных кривизин и полученная таким образом ортотропная оболочка вращения в начальном состоянии не нагружена силами, приводящими к кручению, компоненты $\bar{e}_{\theta z}$, $\bar{e}_{r\theta}$, $\bar{g}_{\theta z}$, $\bar{g}_{r\theta}$ в (10) не являются значимыми, $\tau = Be$, $t = Bg$ и задача (10) распадается на две эквивалентные, вдвое меньшей размерности, чем исходная (10):

$$\delta \iint_{\Omega} [1/2 Be^2 + \sigma \bar{e}] r dr dz = 0; \quad v_{\alpha}|_{\Gamma_u} = 0; \quad \alpha = r, \theta, z; \quad e \nleftrightarrow g; \quad v \nleftrightarrow w. \quad (12)$$

Изложенные постановки задач устойчивости оболочек не отличаются от таковых для тел вращения. Однако задачи устойчивости представляют особый интерес для тонкостенных оболочек, поскольку с потерей устойчивости зачастую связано исчерпание их несущей способности.

В последнем случае отклоненное состояние \tilde{u} , \tilde{E} , $\tilde{\sigma}$ имеет изгибный характер, что, следуя [9], можно использовать для упрощения общих нелинейных соотношений (3), (7), (11). Для осесимметричной деформации оболочек это подробно обсуждалось в [11] и использовалось в [7, 8] при решении геометрически нелинейных задач. При рассмотрении тонких оболочек в связанной системе координат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (см. рис. 1) установлено [9, 12, 13], что удлинения, сдвиги и поворот вокруг нормали α_3 малы по сравнению с поворотами нормали. Переходя от координат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ к цилиндрическим и анализируя следующие из [9, 12, 13] неравенства при разных значениях угла φ (см. рис. 1), имеем, что в случае неосесимметричного изгиба вместо (3) возможно применение приближенных равенств

$$\begin{aligned} E_{rr} &= u_{r,r} + (u_{0,r}^2 + u_{z,r}^2)/2; & E_{zz} &= u_{z,z} + (u_{r,z}^2 + u_{\theta,z}^2)/2; \\ E_{\theta\theta} &= (u_{\theta,\theta} + u_r)/r + [(u_{r,\theta} - u_{\theta})^2 + u_{z,\theta}^2]/2r^2; \\ 2E_{\theta z} &= u_{\theta,z} + u_{z,\theta}/r + u_{r,z}(u_{r,\theta} - u_{\theta})/r; \\ 2E_{rz} &= u_{r,z} + u_{z,r}; & 2E_{r\theta} &= u_{\theta,r} + (u_{r,\theta} - u_{\theta})/r + u_{z,r}u_{z,\theta}/r \end{aligned} \quad (13)$$

[при этом \tilde{E} в (7) — суть нелинейные слагаемые (13)]. Соответствующим образом изменяются и выражения (11).

Использование (13) в (10), (12) для тонкостенных оболочек позволяет не только упростить разрешающие уравнения, но и стабилизировать работу вычислительных алгоритмов, что будет показано ниже на примере решения конкретной задачи.

Сведение континуальной задачи к дискретной. Учитывая отработанность конечно-элементного алгоритма решения задач осесимметричной статики AAMS [7] и преимущества расчета начального НДС и устойчивости на единой алгоритмической основе с общей триангуляцией, решение задач (10), (12) будем осуществлять методом конечных элементов с линейными локальными аппроксимациями коэффициентов разложения (9) $v_{\alpha}(r, z)$, $w_{\alpha}(r, z)$ на треугольниках Ω_e [8, 10]. Проблема отыскания основного НДС (5) сводится к линейной алгебраической

$$\begin{aligned} K_L \bar{U} &= \lambda_S Q_S(p_S) + \lambda_V Q_V(p_V) + \lambda_T Q_T(T) + \lambda_u Q_u(u_S); \\ \bar{U} &= [u_r^1, u_{\theta}^1, u_z^1, \dots, u_r^N, u_{\theta}^N, u_z^N]^T \end{aligned} \quad (14)$$

с последующим вычислением деформаций \tilde{E} и напряжений $\tilde{\sigma}$ в узлах дискретной модели [7] (N — общее число узлов). Решение дискретного аналога континуальной задачи устойчивости заключается в определении значений λ_k ($k = S, V, T, u$), при которых однородная система

$$[K_L + G(\bar{\sigma})] \bar{U} = 0; \quad \bar{U} = [v_r^1, v_{\theta}^1, v_z^1, w_r^1, w_{\theta}^1, w_z^1, \dots, v_r^N, \dots, w_z^N]^T$$

имеет нетривиальное решение. В (15) матрица жесткости K_L для каждого n в (8) совпадает с таковой в задачах неосесимметричной статики [10] и свободных колебаний [8], компоненты геометрической матрицы определяют из соотношения

$$G(\dot{U})_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial U_i \partial U_j} \sum_{e=1}^{N_e} \iint_{\Omega_e} \dot{\sigma}(\bar{e} + \bar{g}) r dr dz; \quad \bigcup_{e=1}^{N_e} \Omega_e = \Omega \quad (16)$$

(N_e — общее число конечных элементов). Кинематические граничные условия, отвечающие постановке задач (5) и (10), удовлетворяются численно путем введения в разрешающие уравнения (14) и (15). Формулировка задачи устойчивости в виде (14)...(16) позволяет легко строить алгоритмы для любых случаев комплексного нагружения. Укажем некоторые из них. Если все λ_{kk} изменяются пропорционально одной величине λ , $\lambda_{kk} = \lambda \kappa_k$ ($k = S, V, T, u$), то (15) сводится к обобщенной алгебраической проблеме на собственные значения

$$[K_L + \lambda G(\sigma)] U = 0; \quad U \neq 0, \quad (17)$$

где $\dot{\sigma}$ находят из (14) при замене λ_k на κ_k . Однако более интересен случай, когда значения ряда параметров нагружения определяются условиями эксплуатации, например фиксированы поля температур $T(r, z)$, объемных сил $\dot{p}_V(r, z)$, кинематические условия $\dot{u}_S(r, z)$ ($r, z \in \Gamma_u$), а расчет устойчивости производится по отношению к одному из типов действующих нагрузок, в данном случае — поверхностных сил $\dot{p}_S(r, z)$ ($r, z \in \Gamma_p$). Тогда из (14), (15) также следует задача на собственные значения

$$\{[K_L + G(\sigma_c)] + \lambda_S G(\sigma_S)\} U = 0; \quad U \neq 0, \quad (18)$$

где $\dot{\sigma}_c$ находится из решения (14) при $\lambda_S = 0$, а $\dot{\sigma}_S$ — при $\lambda_V = \lambda_T = \lambda_u = 0$, $\lambda_S = 1$. Из (14), (15) легко установить и другие частные случаи, в итоге линеаризованная задача устойчивости всегда сводится к алгебраической проблеме на собственные значения.

Все сказанное выше для задач (10), (14)...(18) остается в силе и для ортотропных оболочек. При этом разрешающие соотношения следуют из (12), где в качестве возможных перемещений приняты

$$\tilde{u}_r = w_r \cos(\theta_0 + n\theta) \quad (r \neq z); \quad \tilde{u}_\theta = w_\theta \sin(\theta_0 + n\theta),$$

а уравнения (15)...(18) имеют порядок и структуру, соответствующие вектору амплитуд узловых перемещений $U = [w_r^1, w_\theta^1, w_z^1, w_r^2, \dots, w_z^N]^T$.

Численное определение критических нагрузок и форм потери устойчивости. Задачи на собственные значения (17), (18) имеют те же особенности, что и в проблеме свободных колебаний [8], за исключением того, что матрица G в отличие от матрицы масс не является знакоопределенной. Как и в [8], для анизотропной оболочки решение (17), (18) всегда кратное с формами $\tilde{u}^{(1)}$ и $\tilde{u}^{(2)}$, совпадающими с точностью до сдвига друг относительно друга на угол $\pi/2n$. Это обусловило применение в обеих задачах единого метода решения алгебраической задачи на собственные значения — метода одновременных итераций [14]. Алгоритмы кроме нахождения критических параметров позволяют определять форму потери устойчивости, поля напряжений и деформаций отклоненного состояния, при этом перемещения нормируются по формуле

$$v_\alpha(r, z) = v_\alpha(r, z)/A; \quad \alpha = r, \theta, z; \quad r \neq z; \\ A = \max_{r, z \in \Omega} (|v_r|, |v_\theta|, |v_z|, |w_r|, |w_\theta|, |w_z|).$$

Результаты решения задачи могут быть представлены как в цилиндрической, так и связанной системах координат.

Учитывая малость размера конечного элемента (КЭ) Ω_e , кроме использования точных соотношений для компонент геометрической матрицы G были рассмотрены возможности приближенного их вычисления: с постоянными в области КЭ значениями начальных напряжений σ , равными таковым в центрах тяжести треугольников; с численным одноточечным интегрированием. Во всех случаях компоненты матрицы жесткости K_L вычисляются по точным в рамках аппроксимации аналитическим формулам [8, 10]. С учетом изложенных различий в постановках задач было разработано и протестировано 10 вариантов алгоритмов решения трехмерных задач устойчивости. Все они сведены в таблицу, где знаком (+) показаны применяемые постановка задачи и вычислительные особенности. Сопоставление алгоритмов было проведено на решении задачи устойчивости нагруженной внешним давлением стеклопластиковой оболочки двоякой кривизны [8], показанной на рис. 2. Механические характеристики слоев в координатах, связанных с армированием, совпадают с принятыми в [7, 8]. Анизотропная оболочка является двухслойной с углами армирования $\gamma = \pm 45^\circ$, механические характеристики для однородной ортотропной оболочки получены путем приравнивания нулю соответствующих компонент тензора жесткости B (1), найденного для анизотропных слоев. Сходимость решения контролировалась по собственным значениям, ортогональности собственных векторов, а для анизотропной оболочки — и по совпадению собственных значений (критических давлений), которые в силу постановки должны быть кратными ($p_*(1)$ и $p_*(2)$ в таблице). Результаты получены при одной и той же триангуляции с общим количеством КЭ $N_e = 1800$.

Сравнивая численные результаты, нетрудно установить, что использование постоянных в области КЭ значений начальных напряжений не влияет на точность решения задачи устойчивости; несколько улучшает решение задач (17), (18) применение численного одноточечного интегрирования при вычислении компонент матрицы G ; наилучший результат при расчете тонких оболочек дает использование частично линеаризованных деформационных соотношений (в этом случае кратные значения совпадают с точностью до восьми значащих цифр, являясь наиболее низкими из всех полученных). Таким образом, в качестве

Варианты алгоритмов решения трехмерных задач устойчивости анизотропных и ортотропных оболочек вращения с результатами определения критического внешнего давления

Алгоритм	Тип анизотропии		Кинематические соотношения		Вычисление начальных напряжений		Вычисление интегралов для компонент G		Значение критического давления, МПа	
	Общего вида	Ортотропная оболочка	Общего вида	С учетом тонкостенности	Точное в рамках аппроксимации	Постоянные напряжения в области КЭ	Точное по аналитическим зависимостям	Численное одноточечное	$p_*(1)$	$p_*(2)$
ASRS	+		+		+		+		0,5537	0,5570
ASRSO	+		+			+	+		0,5537	0,5572
ASRSN	+		+		+			+	0,5427	0,5446
ASRSNO	+		+			+		+	0,5427	0,5446
ASRSO1	+			+		+	+		0,52473	0,52473
OSRS		+	+		+		+		0,77229	
OSRSO		+	+			+	+		0,77811	
OSRSN		+	+		+			+	0,76852	
OSRSNO		+	+			+		+	0,76852	
OSRSO1		+		+		+	+		0,73132	

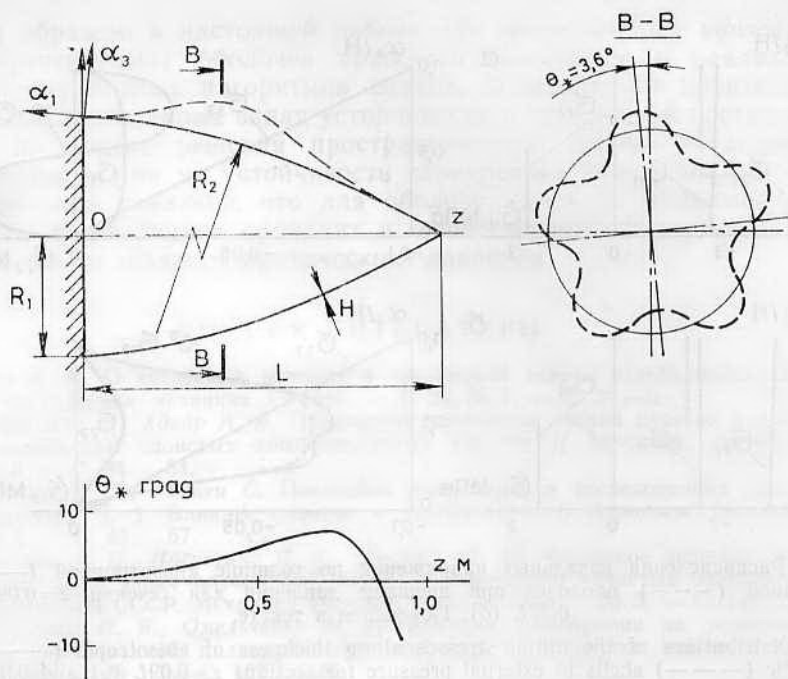


Рис. 2. Геометрическая схема и форма потери устойчивости анизотропной оболочки вращения двойной кривизны ($n=5$). $L=1064$ мм; $R_1=355$ мм; $R_2=2383$ мм; $H=6$ мм. Остальные пояснения в тексте.

Fig. 2. Geometric scheme and buckling mode of an anisotropic double-curved shell of revolution ($n=5$). $L=1064$ mm; $R_1=355$ mm; $R_2=2383$ mm; $H=6$ mm.

базовых для расчета достаточно тонкостенных оболочек необходимо применять алгоритмы ASRSO1 и OSRSO1, где в основу вместо (3), (7) заложены соотношения (13). Для оболочек произвольной толщины или тел вращения лучшие результаты следует ожидать при использовании алгоритмов ASRSN и OSRSN.

Анализ влияния анизотропии на устойчивость оболочки двойной кривизны. Рассмотрим задачу устойчивости нагруженной внешним давлением стеклопластиковой перекрестно армированной под углами $\gamma = \pm 60^\circ$ оболочки [8], показанной на рис. 2, для двух предельных случаев пакета слоев: двухслойного анизотропного и макроскопически однородного ортотропного. На рис. 3 для двух сечений, отстоящих от заделки на $z=0,09L$ (а) и $z=0,37L$ (б), представлены распределения начальных напряжений по толщине оболочки при внешнем давлении $p=0,1$ МПа. Из решения, полученного на основе [7], следует, что за исключением зоны краевого эффекта, начальное НДС практически безмоментно, а влияние анизотропии здесь заключается в наличии значительных напряжений тангенциального сдвига σ_{12} , а также поперечных касательных напряжений σ_{23} (превышающих вдали от заделки σ_{13}), не учитываемых в ортотропной модели. Остальные компоненты начальных напряжений для ортотропной и анизотропной оболочек практически совпадают.

Величины критических давлений потери устойчивости, вычисленные по алгоритмам ASRSO1 для анизотропной оболочки и OSRSN — для ортотропной, равны $p_*^a=0,586$ МПа и $p_*^o=0,929$ МПа соответственно и в обоих случаях реализуются с образованием пяти волн в окружном направлении. Характер изменения прогиба отклоненного состояния вдоль образующей одинаков для рассматриваемых оболочек и показан на рис. 2, при этом потеря устойчивости анизотропной оболочки сопровождается ее «скручиванием» на угол θ^* [для ортотропной оболочки $\theta^*(z)=0$].

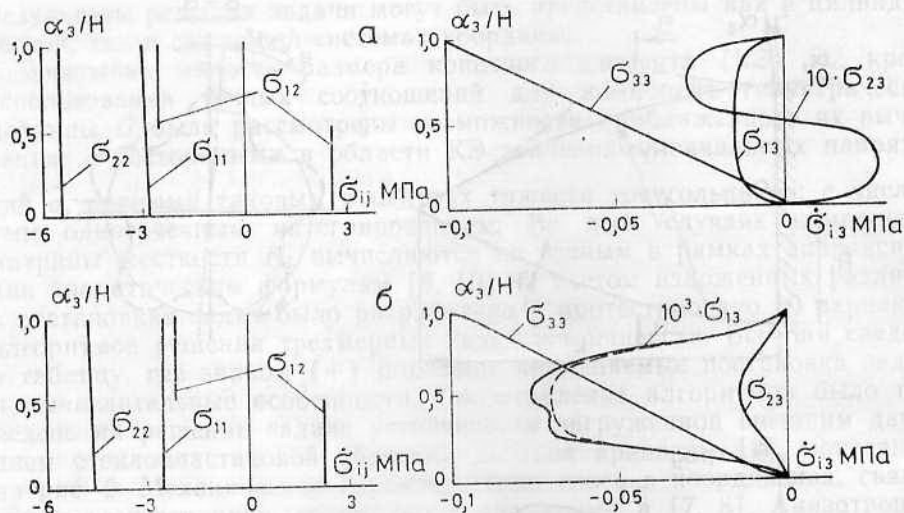


Рис. 3. Распределения начальных напряжений по толщине анизотропной (—) и ортотропной (---) оболочек при внешнем давлении для сечений $z=0,09L$ (а); $0,37L$ (б). Пояснения в тексте.

Fig. 3. Distributions of the initial stresses along thickness of anisotropic (—) and orthotropic (---) shells in external pressure for sections $z=0,09L$ (a) and $0,37L$ (b). Пояснения в тексте.

Столь большие различия значений критического давления объясняются как влиянием анизотропии на начальное НДС, так и еще более значительным ее влиянием на характер деформирования оболочки в отклоненном состоянии. На рис. 4 для сечения $z=0,37L$ представлены законы распределения непрерывных по пакету слоев амплитуд деформаций (e_{ij} , $i, j=1, 2$; $e_{\pm g}$) и напряжений (τ_{iz} , $i=1, 2, 3$; $\tau_{\pm t}$). Хотя «основные» компоненты тангенциальных деформаций e_{ij} для обеих моделей перекрестно армированной оболочки достаточно близки, из рассмотрения остальных величин следует, что пренебрежение анизотропией приводит к существенному искажению общей картины деформирования в отклоненном состоянии.

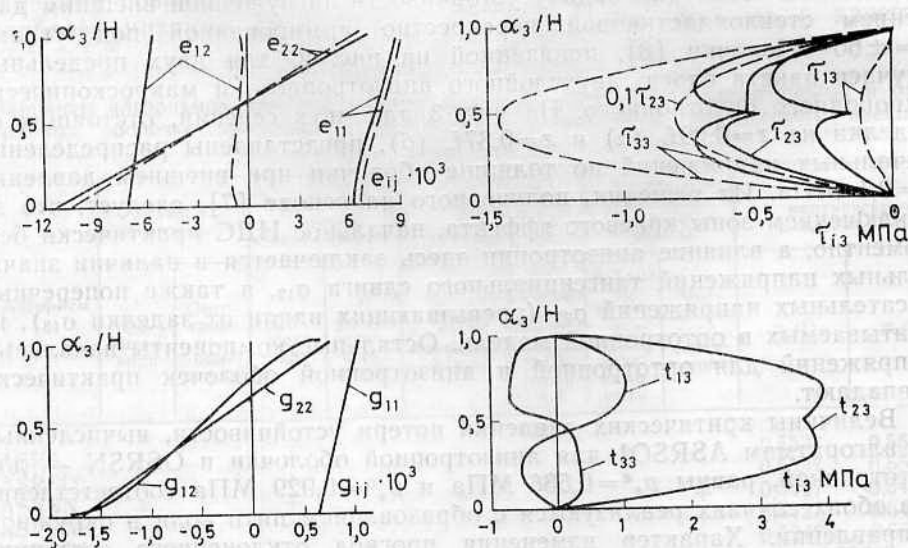


Рис. 4. Распределение амплитуд деформаций и напряжений для анизотропной (—) и ортотропной (---) оболочек в сечении $z=0,37L$. Пояснения в тексте.

Fig. 4. Distribution of the strain and stress amplitudes of anisotropic (—) and orthotropic (---) shells for section $z=0,37L$.

Таким образом, в настоящей работе для неоднородных анизотропных (неортогортропных) оболочек вращения предложен и реализован в виде универсальных алгоритмов подход, позволяющий производить решение линеаризованных задач устойчивости в трехмерной постановке. Впервые на основе решения пространственной задачи исследовано влияние анизотропии на устойчивость перекрестно армированных оболочек, при этом показано, что для оболочки двоякой кривизны пренебрежение анизотропией приводит к существенному завышению (на 58%) расчетного значения критического давления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гузь А. Н. О численных методах в трехмерной теории устойчивости деформируемых тел // Прикл. механика. — 1988. — Т. 24, № 1. — С. 3...8.
2. Редди Дж. Н., Хдейр А. А. Применение различных теорий пластин к выпучиванию и колебаниям слоистых композиционных пластин // Аэрокосм. техника. — 1990. — № 5. — С. 24...34.
3. Капанья Р. К., Рачити С. Последние достижения в исследованиях слоистых балок и пластин. Ч. 1. Влияние сдвигов и устойчивость // Аэрокосм. техника. — 1990. — № 5. — С. 43...57.
4. Григолюк Э. И., Носатенко П. Я., Шишов Ю. Ю. Численное решение геометрически нелинейных задач обобщенной плоской деформации слоистых анизотропных оболочек // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. — 1990. — № 3. — С. 146...153.
5. Носатенко П. Я., Омельченко М. Н. Влияние анизотропии на устойчивость перекрестно армированной цилиндрической оболочки // Механика композит. материалов. — 1991. — № 1. — С. 167...169.
6. Носатенко П. Я., Омельченко М. Н., Шишов Ю. Ю. Нелинейное деформирование и устойчивость оболочек из композитных материалов // Механика и технология изделий из металлических и металлокерамических композиционных материалов: Тез. докл. Всесоюз. конф. — Волгоград, 1989. — С. 57...59.
7. Григолюк Э. И., Носатенко П. Я. Пространственная геометрически нелинейная задача термоупругости слоистых анизотропных оболочек вращения // Механика композит. материалов. — 1988. — № 4. — С. 684...690.
8. Носатенко П. Я., Омельченко М. Н. Численное решение пространственной задачи свободных колебаний слоистых анизотропных оболочек вращения из композитных материалов // Механика композит. материалов. — 1991. — № 5. — С. 861...868.
9. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости. — Л., 1948. — 212 с.
10. Григолюк Э. И., Носатенко П. Я. Об эффекте анизотропии в оболочках вращения при несимметричном нагружении // Докл. АН СССР. — 1991. — Т. 316, № 6. — С. 1354...1357.
11. Григолюк Э. И., Носатенко П. Я. Простейший вариант нелинейных деформационных соотношений в цилиндрических координатах // Вест. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. — 1985. — № 1. — С. 637...645.
12. Шаповалов Л. А. Об одном простейшем варианте геометрически нелинейной теории тонких оболочек // Инж. журн. Механика твердого тела. — 1968. — № 1. — С. 56...62.
13. Григолюк Э. И., Мамай В. И. Об одном варианте уравнений теории конечных перемещений непологих оболочек // Прикл. механика. — 1974. — Т. 10, № 2. — С. 3...13.
14. Corr R. B., Jennings A. A simultaneous iteration algorithm for symmetric eigenvalue problems // Intern. J. Num. Meth. Engng. — 1976. — Vol. 10, No. 3. — P. 647...663.

Научно-производственное объединение
машиностроения, Московская обл.

Поступила в редакцию 23.12.91

Received Dec. 23, 1991